02.06.2022

MAT314 KOMP. FONK. TEO. GİRİŞ II. QUIZ SORULARI

1) $f(z)=\mathrm{Arg}(z^2)$ fonksiyonunun S_f süreklilik kümesini bulunuz

2) $f(z)=w=iz$ fonksiyonu altında $\mathrm{Re}\,z \geqslant 2$ yarı düzleminin görüntüsünü bulunuz geometrik olarak gösteriniz.

3) a) $\arctan z = \frac{i}{2}\log\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$ olduğunu gösteriniz, $z=(1+i)$ değeri için sonucu bulunuz.

b) $\cos(i\arg(1+i))$ sayılarını $a+ib$ şeklinde yazınız.

4) $\lim\limits_{z\to i}(z^2+1)=0$ olduğunu tanım kullanarak gösteriniz.

Prof. Dr. Birsen SAĞIR DUYAR

Not: Süre 45 dakikadır.

1) $h(z)=z^2=(x+iy)^2=x^2-y^2+2ixy$, $u(x,y)=x^2-y^2$

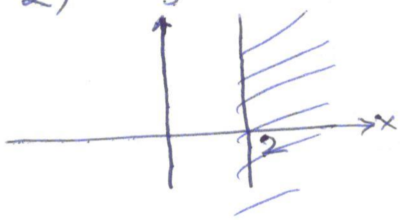
$v(x,y)=2xy$

$S_f=\mathbb{C}-\{x+iy \mid u(x,y)\leq 0,\ v(x,y)=0\}$

$=\mathbb{C}-\{x+iy \mid x^2-y^2\leq 0,\ 2xy=0\}$

$=\mathbb{C}-\{x=0,\ y\in\mathbb{R}\}$

2)

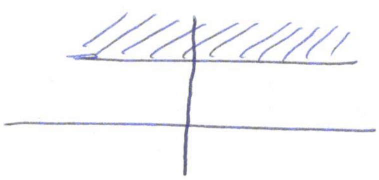


$S=\{x+iy : x\geqslant 2,\ y\in\mathbb{R}\}$

$w=iz=i(x+iy)=-y+ix$, $u=-y$, $v=x$

$v\geqslant 2$, $u\in\mathbb{R}$ o.s. $S'=\{u+iv \mid u\in\mathbb{R},\ v\geqslant 2\}$

$\mathrm{Im}\,w\geqslant 2$



3) a) $\arctan z = w \iff z = \tan w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{(e^{iw} - e^{-iw})/(2i)}{(e^{iw} + e^{-iw})/2} = \frac{1}{i}\,\frac{e^{iw} - e^{-iw}}{e^{iw} + e^{-iw}}$

$$= \frac{1}{i}\,\frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1}$$

$$\Rightarrow iz = \frac{a-1}{a+1} \Rightarrow iza + iz = a - 1$$

$$\Rightarrow a(iz - 1) = -1 - iz$$

$$\Rightarrow a = \underset{(i)}{\frac{1+iz}{1-iz}} = \frac{i-z}{i+z},$$

$$e^{2iw} = \frac{i-z}{i+z} \Rightarrow 2iw = \lg\left(\frac{i-z}{i+z}\right) \Rightarrow w = \underset{(i)}{\frac{1}{2i}} \lg\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$$

$$= -\frac{i}{2} \lg\left(\frac{i-z}{i+z}\right)$$

$$= \frac{i}{2} \lg\left(\frac{i+z}{i-z}\right)$$

$z = 1+i$ için;

$$\arctan(1+i) = \frac{i}{2} \lg\left(\frac{i+1+i}{i-1-i}\right) = \frac{i}{2} \lg\left(\frac{1+2i}{-1}\right) = \frac{i}{2} \lg(-1-2i);$$

$\lg(-1-2i) = \ln|-1-2i| + i \arg(-1-2i)$ olduğundan;

$$\frac{i}{2} \lg(-1-2i) = \frac{i}{2}\left[\ln\sqrt{5} + i \arg(-1-2i)\right] = \frac{i}{2} \ln\sqrt{5} - \frac{1}{2} \arg(-1-2i).$$

b) $\cos(i \arg(1+i)) = \cos\left(i\frac{\pi}{4}\right) = \frac{e^{i(i\frac{\pi}{4})} + e^{-i(i\frac{\pi}{4})}}{2} = \frac{e^{-\frac{\pi}{4}} + e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$.

4) $\forall \varepsilon > 0$ sayısı verilsin. $0<|z-i|<\delta$ iken $|z^2+1|<\varepsilon$ o.ş bir $\delta>0$ sayısı bulalım.

$|z^2+1| = |z+i||z-i|$ yazılır.

$0<|z-i|<\delta<1$ olsun. Buradan, $|z-i|<1 \Rightarrow |z|<2$ olup,

$$\begin{aligned} |z^2+1| = |z-i||z+i| &\le |z-i|\left[|z|+|i|\right] \\ &= |z-i|\left(|z|+1\right) \\ &< \delta \cdot 3 \end{aligned}$$

$\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ alınırsa, $\delta = \min\{1, \frac{\varepsilon}{3}\}$ bulunur. Limit doğrudur.